МАТЕМАТИКА

ВЛАСОВА Ольга Владимировна
старший преподаватель,
Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана,
Россия, г. Москва

ТКАЧ Леонид Иванович
кандидат физико-математических наук, учитель математики,
ГБОУ «Бауманская инженерная школа № 1580», Россия, г. Москва

ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ «ШАГ В БУДУЩЕЕ» 2023-2024 ГОДОВ

Аннотация. *В данной статье представлены некоторые задачи с решениями и ответами, предлагавшиеся на олимпиаде «Шаг в будущее» школьникам 8, 9, 10 классов. Для задач заключительного этапа олимпиады приведены критерии выставления баллов. Надеемся, что представленные материалы будут полезны учителям, школьникам, всем интересующимся олимпиадной математикой.*

Ключевые слова: *математика, олимпиадные задачи для 8-10 классов, олимпиада Шаг в будущее, заключительный этап, отборочный (заочный) этап.*

Задача 1. Вариант 1 (Заключительный этап, 8 класс, 20 баллов)

В равнобедренной трапеции $ABCD, AD \parallel BC$, AD больше BC, на стороне DC взяли точку M и провели через нее прямую параллельную AB до пересечения с AD в точке N так, что $CM{:}\,AN = 2{:}\,3$. Площадь полученного отсеченного треугольника DMN оказалась равной $8\sqrt{2}$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 5$ и $BM = AN$.

Решение

1) Пусть $\angle BAD = \angle MDN = \alpha$, так как $MN \parallel AB$, то $\angle MND = \alpha$ и $ABMN$ - равнобедренная трапеция (по условию $BM = AN$), $\angle ABM = \alpha$.

2) Проведем $ML \parallel AD$, тогда $BL = CM$, $\angle BLM = \angle BAD = \alpha$. Следовательно, $\triangle BML \sim \triangle NMD$ (по двум углам) и $\frac{MN}{ND} = \frac{BM}{BL} = \frac{AN}{CM} = \frac{3}{2}$. Обозначим $AN = BM = 3x$, $CM = 2x$ (рис. 1).

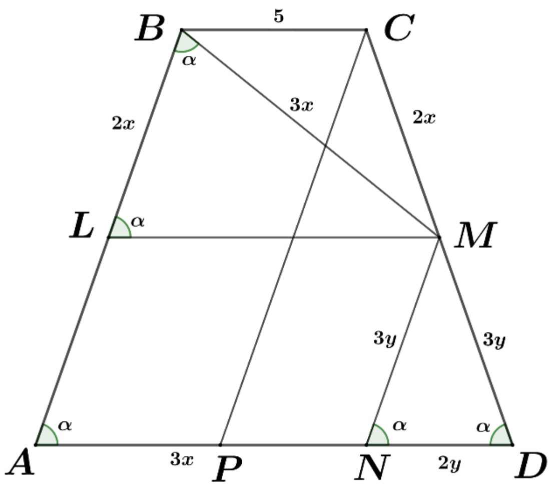

Рис. 1

3) Обозначим $MN = DM = 3y, ND = 2y$. Тогда $S_{\triangle MND} = \frac{1}{2} \cdot ND \cdot \sqrt{MN^2 - \left(\frac{1}{2}ND\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot \sqrt{9y^2 - y^2} = y^2 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, $y = 2$, следовательно, $DM = 3y = 6, ND = 2y = 4$.

4) Проведем $CP \parallel AB$, тогда $AP = BC = 5$, $PN = 3x - 5$. По теореме Фалеса $\frac{DM}{MC} = \frac{DN}{PN}$, $\frac{6}{2x} = \frac{4}{3x-5}$, получаем $x = 3$.

5) По условию $BC = 5$, $AD = AN + ND = 9 + 4 = 13, CD = MC + MD = 6 + 6 = 12$. Найдем высоту h трапеции $ABCD$, $h = \sqrt{CD^2 - \left(\frac{AD-BC}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{13-5}{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$. Площадь трапеции $ABCD$ равна: $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{13+5}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$. Критерии выставления баллов представлены в таблице 1.

Ответ: $72\sqrt{2}$.

Таблица 1

Баллы	Критерии выставления баллов
20	Решение верно.
15	Решение верно, но недостаточно обоснованно или допущена одна арифметическая ошибка, или найдены все стороны трапеции, но задача не доведена до конца.
10	Доказано равенство углов и подобие треугольников.
5	Доказано одно из утверждений, ведущих к решению задачи.
0	Решение не верно или отсутствует.

Задача 1. Вариант 2 (Заключительный этап, 8 класс, 20 баллов)

В равнобедренной трапеции $ABCD, AD \parallel BC$, AD больше BC, на стороне DC взяли точку M и провели через нее прямую параллельную AB до пересечения с AD в точке N так, что $CM{:}\,AN = 4{:}\,5$. Площадь полученного отсеченного треугольника DMN оказалась равной $8\sqrt{21}$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 9$ и $BM = AN$.

Ответ: $126\sqrt{21}$.

Задача 2. Вариант 1 (Заключительный этап, 8 класс, 15 баллов)

Решите уравнение:

$$1 - |x-2|^2 - (2-x)^2(1-(x-2)^2) = (x^2 - 4x + 4)^2.$$

Решение

Сделаем замену переменной $t = |x-2|^2$ и решим полученное уравнение:

$$1 - t - t(1-t) = t^2,$$
$$(1-t)(1-t) = t^2,$$
$$\left[\begin{array}{l} 1 - t = t \\ 1 - t = -t' \end{array}\right.$$

$t = \frac{1}{2}, |x-2| = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Критерии выставления баллов представлены в таблице 2.

Ответ: $x = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таблица 2

Баллы	Критерии выставления баллов
15	Решение верно.
10	Ход решения верный, но допущена одна арифметическая ошибка.
5	Сделана замена переменной, но есть ошибки в применении формул или раскрытии модуля.

Задача 2. Вариант 2 (Заключительный этап, 8 класс, 15 баллов)

Решите уравнение:

$$16 - 4|3-x|^2 - (x-3)^2(4-(x-3)^2) = (x^2 - 6x + 9)^2.$$

Ответ: $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

Задача 3 (Заключительный этап, 8 класс, 15 баллов)

Найдите все такие значения параметра a, что уравнение имеет только одно решение.

$$\frac{\left((y-x^2)(y-a)\right)^2 + (1-2x+y)^2}{|x-2|} = 0$$

Решение

Уравнение равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y = a \\ y = 2x - 1 \end{array}\right. \end{array}\right., \\ x \neq 2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right. & (1) \\ \left\{\begin{array}{l} x = \frac{a+1}{2} \\ y = a \end{array}\right. & (2) \end{array}\right. \\ x \neq 2 \end{array}\right.$$

Выясним при каких значениях параметра a эта система имеет единственное решение. Если $\frac{a+1}{2} = 2$ или $a = 3$, то (в силу ограничения для переменной x) система имеет только одно решение (1;1). Если $\frac{a+1}{2} = 1$ или $a = 1$, то решения систем (1) и (2) совпадают, следовательно, система снова имеет единственное решение (1;1). При $a \neq 1, a \neq 3$ решения систем (1) и (2) существуют, различны и уравнение имеет два различных решения. Следовательно, уравнение имеет только одно решение тогда и только тогда, когда $a \in \{1; 3\}$. Критерии выставления баллов представлены в таблице 3.

Ответ: 1; 3.

Таблица 3

Баллы	Критерии выставления баллов
15	Верное обоснованное решение
10	Верный ход решения, но не рассмотрен случай совпадения решений при $a = 1$ либо допущена вычислительная ошибка.
5	Верные шаги по упрощению уравнения (например, уравнение сведено к совокупности, системе), но не рассмотрено $a = 3$.

Задача 4. Вариант 1 (Отборочный (заочный) онлайн-этап, 9 класс, 14 баллов)

Дано четное число N, не оканчивающееся на 0. Найти предпоследнюю цифру числа N^{40}.

Решение

Найдем две последние цифры числа N^{40}. Так как N – четное число и некратно 10, то оно может иметь вид $5k \pm 1$ или $5k \pm 2$ (то есть не $5k$), где k – некоторое натуральное число.

Используя бином Ньютона (или перемножая скобки и используя свойства сравнений), получим, что $(5k \pm 1)^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 25)$. Аналогично, $(5k \pm 2)^{40} \equiv 2^{40} (\mathrm{mod}\ 25)$. Далее, $2^{10} = 1024$, поэтому $2^{40} = 1024^4 \equiv (-1)^4 (\mathrm{mod} 25) \equiv 1 (\mathrm{mod} 25)$. Таким образом, в любом случае $N^{40} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 25)$.

Следовательно, возможны только четыре варианта двух последних цифр числа N^{40}: 01, 26, 51, 76 следует, что N^{40} делится на 4, поэтому возможен только вариант 76, то есть предпоследняя цифра числа N^{40} – это 7.

Ответ: 7.

Задача 4. Вариант 2 (Отборочный (заочный) онлайн-этап, 9 класс, 14 баллов)

Дано четное число N, не оканчивающееся на 0. Найти предпоследнюю цифру числа N^{60}.

Ответ: 7.

Задача 5. Вариант 1 (Отборочный (заочный) онлайн-этап, 9 класс, 14 баллов)

На каждой из 61 карточки написано одно из чисел: 3, 4 или 5. Число карточек с тройками на 11 больше карточек с пятерками. Из этих карточек, располагая одну карточку за другой, составляют натуральное число N. Найдите остаток от деления числа N на 9.

Решение

1. Остаток от деления натурального числа N на 9 равен остатку от деления на 9 суммы цифр этого числа.

2. Пусть x – число троек среди цифр числа N, y – число четверок, z – число пятерок. Из условия $\begin{cases} x + y + z = 61 \\ x - z = 11 \end{cases}$, $\begin{cases} 4x + 4y + 4z = 244 \\ -x + z = -11 \end{cases}$. Сложив уравнения системы, получим $3x + 4y + 5z = 233$, то есть сумма цифр числа N равна 233, $233 = 25 \cdot 9 + 8$, следовательно, остаток от деления на 9 суммы цифр числа N равен 8.

Ответ: 8.

Задача 5. Вариант 2 (Отборочный (заочный) онлайн-этап, 9 класс, 14 баллов)

На каждой из 45 карточек написано одно из чисел: 4, 5 или 6. Число карточек с четверками на 5 больше карточек с шестерками. Из этих карточек, располагая одну карточку за другой, составляют натуральное число N. Найдите остаток от деления числа N на 9.

Ответ: 4.

Задача 6. Вариант 1 (Отборочный (заочный) онлайн-этап, 10 класс, 9 баллов)

Найти наибольшее значение выражения:

$$\sqrt{(x-2)(y-x)} + \sqrt{(8-y)(2-x)} + \sqrt{(x-y)(y-8)}$$

при $x \in [1; 3]$ и $y \in [0; 9]$.

Решение

Обозначим наше выражение:

$$A(x; y) = \sqrt{(x-2)(y-x)} + \sqrt{(8-y)(2-x)} + \sqrt{(x-y)(y-8)}.$$

Выясним при каких x, y оно определено: $\begin{cases} (x-2)(y-x) \geq 0 \\ (8-y)(2-x) \geq 0 \\ (x-y)(y-8) \geq 0 \end{cases}$, перемножив неравенства системы, получим следствие системы $-(x-2)^2(x-y)^2(y-8)^2 \geq 0$ или $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 8 \\ x = y \end{array}\right.$. Уточним область определения выражения $A(x; y)$.

Если $x = 2$, то система сводится к неравенству $(2-y)(y-8) \geq 0$, $y \in [2; 8]$ (мы учитываем, что по условию $y \in [0; 9]$), таким образом, получаем часть области определения $\begin{cases} x = 2 \\ y \in [2; 8] \end{cases}$.

Если $y = 8$, то система сводится к неравенству $(x-2)(8-x) \geq 0$, $x \in [2; 8]$. Учитывая, что по условию $x \in [1; 3]$, получаем еще часть области определения $\begin{cases} y = 8 \\ x \in [2; 3] \end{cases}$.

Если $x = y$, то система сводится к неравенству $(8-x)(2-x) \geq 0$, $x \in (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$.

Учитывая, что по условию $x \in [1;3]$, получаем еще одну часть области определения $\begin{cases} x = y \\ x \in [1;2] \end{cases}$.

Для наглядности изобразим область определения выражения $A(x;y)$ в плоскости Oxy (рис. 2).

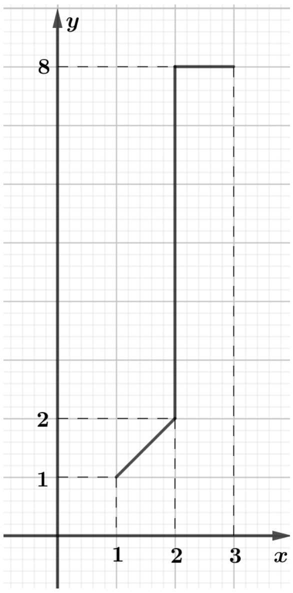

Рис. 2

Оценим значения $A(x;y)$ на каждом участке:

$A(2;y) = \sqrt{(2-y)(y-8)} = \sqrt{9-(y-5)^2} \leq A(2;5) = 3$

(учитываем, что $y \in [2;8]$).

$A(x;8) = \sqrt{(x-2)(8-x)} = \sqrt{9-(x-5)^2} \leq A(3;8) = \sqrt{5}$

(учитываем, что $x \in [2;3]$).

$A(x;x) = \sqrt{(8-x)(2-x)} = \sqrt{(x-5)^2-9} \leq A(1;1) = \sqrt{7}$

(учитываем, что $x \in [1;2]$).

Таким образом, наибольшее значение выражения $A(x;y)$ равно 3.

Ответ. 3.

Задача 6. Вариант 2 (Отборочный (заочный) онлайн-этап, 10 класс, 9 баллов)

Найти наибольшее значение выражения:

$$\sqrt{(x-3)(y-x)} + \sqrt{(6-y)(3-x)} + \sqrt{(x-y)(y-6)}$$

при $x \in [2;4]$ и $y \in [0;10]$.

Ответ: 2.

VLASOVA Olga Vladimirovna
Senior Lecturer, Bauman Moscow State Technical University, Russia, Moscow

TKACH Leonid Ivanovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Mathematics Teacher,
GBOU "Bauman Engineering School No. 1580", Russia, Moscow

TASKS OF THE OLYMPIAD “STEP INTO THE FUTURE” 2023-2024

Abstract. *This article presents some problems with solutions and answers that were proposed at the Olympiad "Step into the Future" to schoolchildren of grades 8, 9, 10. For the tasks of the final stage of the Olympiad, the criteria for awarding points are given. We hope that the presented materials will be useful to teachers, schoolchildren, and anyone interested in Olympiad mathematics.*

Keywords: *mathematics, Olympiad tasks for grades 8-10, Olympiad Step into the future, final stage, qualifying (correspondence) stage.*